Aula 7

Ex 1 Seja $E = \ell^p = D(A)$, $1 \le p < \infty$, e

$A(x_1, x_2, \dots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.

É fácil ver que $R(A) = \ell^p$ e $N(A) = \{e_1, \dots, e_n\}$ => (vetores de base canônica)

$\mathrm{ind}(A) = n$. Consideremos $T: \ell^p \to \ell^p$

tal que $T(x_1, x_2, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, onde

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Mostremos que T é compacto.

Considere $T_N : \ell^p \to \ell^p$ tal que $T_N(x_1, x_2, \dots) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_N x_N, 0, 0, \dots)$

Mostremos que $\|T - T_N\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Seja $\varepsilon > 0$ =>

$\exists N_0$ t.q. $|\lambda_n| < \varepsilon$, $n \ge N_0$ => para $n \ge N_0$ temos

$$\|T_N - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_N - T)x\| = \sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |\lambda_j x_j|^p \Big)^{1/p} \le$$

$$\le \varepsilon \cdot \sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j| \Big) \le \varepsilon \Rightarrow T_N \to T.$$ Como T_N tem

posto finito, T_N é compacto => T é compacto.

Por Teorema 2 da aula 6, obtemos que

$\mathrm{ind}(A+T) = \mathrm{ind}(A) = \underline{n}$.

Espectro essencial

Def 1 Seja E um esp. de Banach

1) Seja $A \in B(E)$ => espectro essencial de A é

$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ não é de Fredholm}\}$.

Além disso definimos o conjunto $\sigma^{\circ}_{ess}(A) \supseteq \sigma_{ess}(A)$:

$\sigma^{\circ}_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A$ não é de Fredholm com índice $0\}$

2) Seja $A : D(A) \subset E \to E$ fechado $\Rightarrow$

$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A : [D(A)] \to E$ não é de Fredholm$\}$ e

$[D(A)] = (D(A), \|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|)$

$\sigma^{\circ}_{ess}(A) = \{$ —— $''$ —— de índice $0\}$

Observação 1) Seja $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma^{\circ}_{ess}(A) \Rightarrow$

$\lambda - A$ é de Fredholm com $\mathrm{ind} = 0 \Rightarrow$

$\dim N(\lambda - A) = \dim E / R(\lambda - A) < \infty$. Logo $N(\lambda - A) \neq \{0\}$

(ou seja λ é autovalor de multiplicidade finita)

De fato, se for $N(\lambda - A) = \{0\} \Rightarrow R(\lambda - A) = E \Rightarrow$

$\lambda - A$ é bijetor e fechado $\Rightarrow (\lambda - A)^{-1} : E \to E$ é fechado $\Rightarrow (\lambda - A)^{-1}$ é limitado $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ (absurdo)

2) Obviamente temos $\sigma_{ess}(A) \subseteq \sigma^{\circ}_{ess}(A)$.

~~Lema 1~~ isso é de fato a parte do espectro!

Mostremos que $\sigma^{\circ}_{ess}(A) \subseteq \sigma(A)$

Seja $\lambda \in \sigma^{\circ}_{ess}(A) \Rightarrow$ tem 2 casos:

a) $\lambda - A$ não é de Fredholm $\Rightarrow$

- ou $R(\lambda - A) \neq \overline{R(\lambda - A)} \Rightarrow \lambda \in \sigma_{ap}(A)$
- ou $\dim N(\lambda - A) = \infty \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$ (λ tem multiplicidade ~~fi~~ infinita)
- ou $\dim E / R(\lambda - A) = \infty \Rightarrow R(\lambda - A) \neq E \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$

b) $\lambda - A$ é de Fredholm e $\mathrm{ind}(\lambda - A) \neq 0 \Rightarrow$

- ou $N(\lambda - A) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$

ou $R(\lambda - A) = \overline{R(\lambda - A)} \neq E \Rightarrow \lambda \in \sigma_4(A)$.

Lema 1 Sejam $A \in B(E)$ e $T \in B_0(E) \Rightarrow$
$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+T)$ e $\sigma_{ess}^{\circ}(A) = \sigma_{ess}^{\circ}(A+T)$

Demonstração Por Teorema 2 da aula passada $\lambda - A$ e $\lambda - (A+T)$ são de Fredholm simultaneamente e $\operatorname{ind}(\lambda - A) = \operatorname{ind}(\lambda - (A+T))$.

Como generalizar Lema 1 para o caso do A não limitado? Veja abaixo!

Def 2 Sejam $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ e $T : D(T) \subset E_1 \to E_2$ tais que $D(A) \subseteq D(T) \Rightarrow T$ é dito A-compacto se $T : [D(A)] \to E_2$ for compacto.

$$[D(A)] = (D(A), \|\cdot\|_A)$$

Ex 2 Sejam $E_1 = E_2 = D(B) = C[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$, $B = I$, $(Ax)(t) = x'(t)$. Mostremos que B é A-compacto. Seja $\{x_n\}$ limitada em $[D(A)]$ ou $\|x_n\| + \|x_n'\| \leq C \ \forall n$. Basta mostrar que $\exists \{x_{n_k}\}$ convergente em $C[0,1]$.

Temos: $\|x_n\| \leq C \ \forall n$ e
$$|x_n(s) - x_n(t)| = \left| \int_t^s x_n'(y)\,dy \right| \leq |t-s| \cdot C \Rightarrow$$
$\{x_n\}$ é equilimitada e equicontínua em $C[0,1]$
$\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$ convergente $\Rightarrow B$ é A-compacto.

Lema 2 Sejam $A: D(A) \subset E_1 \to E_2$ fechado e
$T: D(T) \subset E_1 \to E_2$ A-compacto $\Rightarrow$ $A+T$ com
$D(A+T) = D(A)$ é fechado e T é $(A+T)$-compacto.

Demonstração • Seja $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que $\|x_n\|_{A+T} \leq C_1$, $\forall n$.
Mostremos que $\exists \{\tilde{x}_n\} \subseteq \{x_n\}$ tal que $\{A\tilde{x}_n\}$ seja limitada. Suponha que não existe $\Rightarrow$
$\alpha_n = \|Ax_n\|_2 \to \infty$. Define $y_n = \alpha_n^{-1} x_n$ $\Rightarrow$
e $y_n \to 0$ em E_1 e $(A+T)y_n = \underbrace{\alpha_n^{-1}}_{\to 0} \underbrace{(A+T)x_n}_{\text{limitada}} \to 0$ em E_2
com $\|Ay_n\|_2 = 1$. Como $\|y_n\|_A = \underbrace{\|y_n\|_1}_{\to 0} + \|Ay_n\|_2 \leq$
$\leq C_1 + 1$ e T é A-compacto $\Rightarrow$ $\exists \{Ty_{n_k}\}$
tal que $Ty_{n_k} \to z$ em E_2 $\Rightarrow$ $Ay_{n_k} \to -z$ em E_2.

Temos $\begin{cases} y_{n_k} \to 0 \\ Ay_{n_k} \to -z \end{cases} \xRightarrow[A \text{ é fechado}]{} -z = A \cdot 0 = 0$, mas
isso é absurdo já que $1 = \|Ay_{n_k}\| \to \|z\| = 0$.
Logo $\exists \{A\tilde{x}_n\}$ limitada em E_2. Como T é A-comp.,
$\exists \{T\tilde{x}_{n_k}\}$ convergente. Finalmente, T é $(A+T)$-comp.

• Mostremos que $A+T$ é fechado. Seja

$\begin{cases} x_n \to x, \; x_n \in D(A+T) \\ (A+T)x_n \to y \end{cases} \Rightarrow \exists\, C > 0$ tal que

$\|x_n\|_{A+T} = \|x_n\|_1 + \|(A+T)x_n\|_2 \leq C \;\; \forall n \xRightarrow{\text{parte anterior}}$

$\exists \{x_{n_k}\}$ t.q. $Tx_{n_k} \to z$ $\Rightarrow$

Сканировано с CamScanner

$Ax_{n_k} \to y - z$. Como A é fechado, $x \in D(A) = D(A+T)$ e $Ax = y - z$. $\Rightarrow \|x_{n_k} - x\|_1 + \|Ax_{n_k} - Ax\|_2 \to 0$ ou seja $\|x_{n_k} - x\|_A \to 0$, logo $\|T(x_{n_k} - x)\|_2 \to 0$ (Já que $T : [D(A)] \to E_2$ é compacto e portanto é contínuo.)

$\Rightarrow Tx = z$ (pela unicidade do limite).

Finalmente, $(A+T)x = (y - z) + z = y \Rightarrow T + A$ é fech.

<u>Teorema 1</u> Sejam $A : D(A) \subset E \to E$ fechado e T A-compacto $\Rightarrow \sigma_{ess}(A+T) = \sigma_{ess}(A)$ e $\sigma^{0}_{ess}(A+T) = \sigma^{0}_{ess}(A)$

<u>Demonstração</u> • Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A) \Rightarrow \lambda - A : [D(A)] \to E$ é de Fredholm. $\underbrace{\text{Como } -T : [D(A)] \to E \text{ é compacto, por Teorema 2 da aula passada}}$ $\lambda - A - T$ é de Fredholm $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A+T)$. Volta é análoga.

• Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma^{0}_{ess}(A) \Rightarrow \lambda - A : [D(A)] \to E$ é de Fredholm e $\operatorname{ind}(\lambda - A) = 0$ $\Rightarrow \lambda - A - T$ é de Fredholm e $\operatorname{ind}(\lambda - A - T) = 0 \Rightarrow \mathbb{C} \setminus \sigma^{0}_{ess}(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma^{0}_{ess}(A+T)$

Reciprocamente, seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma^{0}_{ess}(A+T) \Rightarrow$ $\lambda - A - T : [D(A+T)] \to E$ é de Fredholm e $\operatorname{ind}(\lambda - A - T) = 0$. Como T é A-compacto, por Lema 2, T é $(A+T)$-comp. ou seja $T : [D(A+T)] \to E$ é comp. $\Rightarrow \lambda - A = (\lambda - A - T) + T$ é de Fredholm e $\operatorname{ind}(\lambda - A) = 0$ por Teorema 2 da aula passada.